Grado en Matemáticas – Análisis Matemático I

1. Sean A y B conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ y definamos
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
Prueba que si A es cerrado y B es compacto entonces $A + B$ es cerrado.

2. Sea (E, d) un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subset E$. Sea $\mathrm{dist}(\,.\,, A)\colon E \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por:
$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\mathrm{d}(x, a) : a \in A\} \qquad \forall x \in E$$
   a) Prueba que para todos $x, y \in E$ se verifica que $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leqslant \mathrm{d}(x, y)$.
   b) Prueba que $\mathring{A} = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, E \setminus A) > 0\}$ y $\overline{A} = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, A) = 0\}$.

3. Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$.

Granada, 2 de noviembre de 2016

Grado en Matemáticas – Análisis Matemático I

1. Sean A y B conjuntos no vacíos en $\mathbb{R}^n$ y definamos
$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
Prueba que si A es cerrado y B es compacto entonces $A + B$ es cerrado.

2. Sea (E, d) un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subset E$. Sea $\mathrm{dist}(\,.\,, A)\colon E \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por:
$$\mathrm{dist}(x, A) = \inf\{\mathrm{d}(x, a) : a \in A\} \qquad \forall x \in E$$
   a) Prueba que para todos $x, y \in E$ se verifica que $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leqslant \mathrm{d}(x, y)$.
   b) Prueba que $\mathring{A} = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, E \setminus A) > 0\}$ y $\overline{A} = \{x \in E : \mathrm{dist}(x, A) = 0\}$.

3. Teorema de Bolzano – Weierstrass en $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_2)$.

Granada, 2 de noviembre de 2016